BACALAUREAT 2007
SESIUNEA IULIE

M1-1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

b) Să se calculeze distanţa de la punctul $E(-1;1)$ la dreapta $x - y + 1 = 0$.

c) Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în $E(-1;1)$ care este tangent la dreapta $x - y + 1 = 0$.

d) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $L(1,2)$, $M(2,4)$ şi $N(3,8)$.

e) Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC cu $AB = 2$, $AC = 3$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60°$.

f) Să se determine a, b, $c \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(1,2,3)$, $B(3,1,2)$ şi $C(2,3,1)$ să aparţină planului $x + ay + bz + c = 0$.

SUBIECTUL II

1. a) Să se calculeze a_7, dacă $\frac{1}{7} = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$.

b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_3$ să verifice relaţia $\hat{x}^{2007} = \hat{1}$.

c) Să se calculeze suma $C_5^0 + C_5^1 + \cdots + C_5^5$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x + 9^x = 12$.

e) Să se calculeze suma termenilor raţionali ai dezvoltării binomului $(2 + \sqrt{3})^3$.

2. Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \ln(x+1)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.

d) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

e) Să se calculeze $\int_0^1 \ln(x+1)\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, unde a, $b \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$, $S_0 = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ şi $\Delta = \det(A \cdot A^T)$, unde prin A^T am notat transpusa matricei A. Se ştie că $\det(X \cdot Y) = \det X \cdot \det Y$, $(\forall)\ X, Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

a) Să se verifice că $S_1 = 0$ şi $S_2 = -2a$.

b) Să se arate că $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze S_3 şi S_4 numai în funcţie de a şi b.

d) Să se verifice că $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$.

e) Să se calculeze Δ în funcţie de a şi b.

f) Să se arate că dacă $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $\Delta \geq 0$.

g) Să se arate că dacă $\Delta \geq 0$, atunci $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \ldots \cos nx \, dx$, $(\forall)\; n \in \mathbb{N}^*$. Se admite cunoscută formula $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $(\forall)\; a,\, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx$, $(\forall)\; k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze integrala I_2.

c) Să se arate că dacă $n \in \{5, 6\}$, atunci $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n \neq 0$, pentru orice alegere a semnelor.

d) Să se arate că există o alegere a semnelor astfel încât $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n = 0$, dacă şi numai dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.

e) Să se arate că $I_n \neq 0$ dacă şi numai dacă n este un număr de forma $4k$ sau $4k+3$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n}$.

g) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $A_n = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \,|\, I_k \neq 0\}$ şi cu a_n numărul de elemente ale lui A_n. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(6,4)$ şi $C(5,-3)$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$.

b) Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

d) Să se determine coordonatele simetricului punctului C faţă de punctul B.

e) Folosind eventual egalitatea $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$, să se calculeze $\sin 15°$.

f) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \dfrac{3-4i}{-4+3i}\cdot$

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se arate că numărul $\lg 1000$ este natural.

b) Şirul a_1, a_2, 12, 17, a_5, a_6, ... este o progresie aritmetică. Să se determine termenul a_1.

c) Să se demonstreze că $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se determine coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(2+x)^4$.

e) Să se determine restul împărţirii polinomului $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g = X^2 - X + 1$.

2. Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x) + \dfrac{1}{x^2}$, pentru $x > 0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f''(x)\, dx$.

d) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(2,\alpha)$ să aparţină graficului funcţiei f.

e) Să se arate că $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $(\forall)\ x > 0$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că $A \in G$ şi $B \in G$.

c) Să se arate că $AB \neq BA$.

d) Să se găsească o matrice $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ astfel încât $A \cdot X = I_2$.

e) Să se arate că $AB \notin G$.

f) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n, cu proprietatea că $(AB)^n = I_2$.

g) Să se arate că mulţimea G are cel puţin 6 elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}\cdot$

a) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.

b) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

d) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

e) Să se deducă inegalităţile $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$, $(\forall)\ x \geq 0$.

f) Să se arate că $1 - x^9 + x^{18} - x^{27} \leq \dfrac{1}{1+x^9} \leq 1 - x^9 + x^{18}$, $(\forall)\ x \geq 0$.

g) Să se arate că aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^9}$, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$, este un număr real cuprins în intervalul $(0,91; 0,96)$.

M2

Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările
Filiera teoretică: profil Uman, specializarea ştiinţe sociale; Filiera vocaţională: profil Militar, specializarea ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze distanţa de la punctul $A(3,4)$ la punctul $B(5,6)$.

b) Să se calculeze $\cos^2 a + \sin^2 a$, $a \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{3}$.

d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $2 - 5i$.

e) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,4)$ şi $B(5,6)$ să fie pe dreapta de ecuaţie $x + ay + b = 0$.

f) Dacă în triunghiul ABC, $AB = 1$, $AC = 2$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, să se calculeze lungimea laturii BC.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze câte funcţii $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) \neq f(b)$.

b) Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $n^2 \geq n!$.

c) Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $4^x - 32 = 0$.

d) Să se calculeze $5 + 15 + 25 + 35 + \ldots + 95$.

e) Dacă funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt $f(x) = x^{10} - 1$ şi $g(x) = x^{15} + 1$, să se calculeze $(g \circ f)(0)$.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + x^2)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

c) Să se arate că funcţia f este crescătoare pe $(0, \infty)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\, dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} 4x f'(x)$.

SUBIECTUL III

Pentru matricea $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $\operatorname{tr}(M) = a + d$.

a) Să se calculeze $\operatorname{tr}(A)$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că, dacă $B = C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(C)$.

c) Să se găsească două matrice P, $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, diferite, pentru care $\operatorname{tr}(P) = \operatorname{tr}(Q)$.

d) Să se arate că, dacă U, $V \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\operatorname{tr}(U) = \operatorname{tr}(V)$ şi $\operatorname{tr}(U^2) = \operatorname{tr}(V^2)$, atunci $\det(U) = \det(V)$.

e) Să se arate că $\operatorname{tr}(aD + bE) = a \cdot \operatorname{tr}(D) + b \cdot \operatorname{tr}(E)$, $(\forall)$ a, $b \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ D, $E \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

f) Să se arate că $\operatorname{tr}(F \cdot G) = \operatorname{tr}(G \cdot F)$, $(\forall)$ F, $G \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

g) Să se arate că, dacă L, $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\operatorname{tr}(L \cdot X) = \operatorname{tr}(N \cdot X)$, $(\forall)$ $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $L = N$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+4}{x+5}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 0$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

c) Să se arate că $\dfrac{13}{10} \leq f(x) < 3$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

e) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$, la graficul funcţiei f.

f) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\ dt$.

g) Să se rezolve, în intervalul $[0, \infty)$, ecuaţia $f(x) = 2$.

M3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze $\log_2 30 - \log_2 15$.

b) Să se determine soluţia reală a ecuaţiei $4^{x+1} = 8$.

c) Să se calculeze $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$.

d) Să se determine pătratele perfecte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

e) Să se calculeze media aritmetică a numerelor 3, 7, 11.

f) Să se determine restul împărţirii numărului 37 la 7.

SUBIECTUL II

1. Se consideră ecuaţia $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- **a)** Să se calculeze discriminantul ecuaţiei.
- **b)** Să se rezolve ecuaţia.
- **c)** Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei.
- **d)** Să se calculeze produsul soluţiilor ecuaţiei.
- **e)** Să se rezolve inecuaţia $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

2. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor $AB = 15$, $BC = 17$ iar $AC = 8$.

- **a)** Să se arate că $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$.
- **b)** Să se determine măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.
- **c)** Să se determine aria triunghiului ABC.
- **d)** Să se determine lungimea segmentului MN, unde M este mijlocul segmentului AB, iar N este mijlocul segmentului BC.
- **e)** Să se determine perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC.

SUBIECTUL III

Se consideră o dreaptă d şi două puncte A şi B situate de aceeaşi parte a dreptei d. Notăm cu C simetricul punctului A faţă de dreapta d şi cu D intersecţia dintre segmentul (BC) şi dreapta d.

a) Să se arate că $AD = CD$.

b) Să se verifice că $AD + DB = BC$.

c) Să se arate că $AB < BC$.

d) Să se arate că perpendiculara în D pe dreapta d este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$.

e) Să se arate că, dacă punctul E aparţine dreptei d, atunci $AE = EC$.

f) Să se arate că $AM + MB \geq AD + DB$, pentru orice punct M de pe dreapta d.

g) Să se arate că, dacă $N \in d$ şi $AN + NB = AD + DB$, atunci $N = D$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea $A = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se verifice că $\{0, 1, 2, 4\} \subset A$.

b) Să se verifice identitatea $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa - yb)^2 + (ay + bx)^2$, $(\forall)\ a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că, dacă z, $w \in A$, atunci $z \cdot w \in A$.

d) Să se arate că $3 \notin A$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $13^n \in A$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se demonstreze că mulţimea $A \setminus \{13^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \neq \emptyset$.

g) Să se calculeze suma elementelor din mulţimea $A \cap \{1, 2, \ldots, 10\}$.

SESIUNEA AUGUST

M1-1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 2 + i \sin 2$.

b) Să se calculeze distanţa de la punctul $D(1, 2)$ la punctul $C(0, 1)$.

c) Să se calculeze coordonatele punctului de intersecţie dintre cercul $x^2 + y^2 = 25$ şi dreapta $3x + 4y - 25 = 0$.

d) Să se arate că punctele $L(4, 1)$, $M(6, 3)$ şi $N(7, 4)$ sunt coliniare.

e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(2, 4, 0)$ şi $D(1, 2, 3)$.

f) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(-1 + i\sqrt{3})^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se verifice identitatea $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, $(\forall)$ x, y, $z \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, unde x, y, $z \in \mathbb{R}$, atunci $x = y = z$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x + 9^x + 49^x = 6^x + 14^x + 21^x$.

d) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_6$ să verifice relaţia $\hat{x}^3 = \hat{x}$.

e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Să se arate că funcţia f este monoton crescătoare pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Pentru fiecare matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu $S(A)$ suma elementelor sale, cu $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ transpusa ei şi cu $\det A$ determinantul matricei A. Să se arate că:

a) $S(A^T) = S(A) = a + b + c + d$.

b) $S(x \cdot P + y \cdot Q) = x \cdot S(P) + y \cdot S(Q)$, $(\forall)$ P, $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $(\forall)$ x, $y \in \mathbb{R}$.

c) $S(A \cdot A^T) = (a + c)^2 + (b + d)^2$.

d) dacă $S(A \cdot A^T) = 0$, atunci $\det A = 0$.

e) $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ P, $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,
$S\left((P + x \cdot Q) \cdot (P^T + x \cdot Q^T)\right) = S(P \cdot P^T) + x\left(S(P \cdot Q^T) + S(Q \cdot P^T)\right) + x^2 \cdot S(Q \cdot Q^T)$.

f) dacă P, $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\det Q \neq 0$, atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = S\left((P + x \cdot Q)(P^T + x \cdot Q^T)\right)$ are gradul egal cu 2.

g) $S(P \cdot P^T) \cdot S(Q \cdot Q^T) \geq S(P \cdot Q^T) \cdot S(Q \cdot P^T)$, $(\forall)$ P, $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

SUBIECTUL IV

Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcţiile $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f_n(x) = x^n + \ln x$.

a) Să se calculeze $f_n'(x)$, $x > 0$.

b) Să se arate că funcţia f_n este monoton crescătoare, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x)$.

d) Să se arate că funcţia f_n este bijectivă, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$.

e) Să se arate că $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia $f_n(x) = 0$ are o unică soluţie $x_n \in (0, 1)$.

f) Să se arate că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.

g) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

M1-2

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ dacă punctul $A(1, -2)$ aparţine cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - a = 0$.

b) Să se scrie ecuaţia unei drepte perpendiculare pe dreapta de ecuaţie $x = 4$.

c) Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$.

d) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

e) Să se calculeze lungimea laturii $[AC]$ a triunghiului ABC în care $BC = 2$, $AB = 4$ şi $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$.

f) Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $BC = 2$, $AB = 4$ şi $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine simetricul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbb{Z}_8, +)$.

b) Să se determine $x \in (0, \infty)$ pentru care $\log_3 2 + \log_3 x = 1$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $9^x = 27$.

d) Să se calculeze câte numere de 4 cifre încep şi se termină cu o cifră număr par.

e) Să se calculeze în câte moduri se pot alege două persoane dintr-un grup format din 6 persoane.

2. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} [f(n+1) - f(n)]$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

e) Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea T a matricelor cu 3 linii şi 3 coloane şi care au toate elementele în mulţimea $U = \{0, 1, 2\}$, precum şi mulţimea $V = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle|\, x \in U \right\} \subset T$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1) \in V$ şi să se determine rangul acesteia.

b) Să se studieze dacă există $x, y \in U$ pentru care $A(x) \cdot A(y) \in V$.

c) Dacă $B = A(1) \in V$, să se calculeze B^2 şi B^3.

d) Să se arate că pentru $B = A(1) \in V$ avem $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se arate că există $A, B \in V$ astfel încât $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) \in U$.

f) Să se arate că dacă $C \in T$ şi C are 8 elemente egale, atunci $\det C = 0$.

g) Să se arate că există $M \in T$ cu $\det M \neq 0$ şi pentru care M are 7 elemente egale.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) Să se determine punctul de extrem local al funcţiei f.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

d) Să se arate că funcţia f este convexă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$.

e) Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = 3$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x)$.

g) Să se arate că $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx > 0$.

M2

Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările
Filiera teoretică: profil Uman, specializarea ştiinţe sociale; Filiera vocaţională: profil Militar, specializarea ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

a) Să se determine aria unui pătrat cu perimetrul egal cu 8.

b) Să se determine lungimea înălţimii unui triunghi echilateral având latura de lungime 4.

c) Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AB = 6$ şi $AC = 10$. Să se calculeze tg B.

d) Să se determine numărul real a, astfel încât punctul $A(2, a)$ să aparţină dreptei de ecuaţie $x + y + 1 = 0$.

e) Să se scrie coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A(1, 2)$ şi $B(3.4)$.

f) Dacă $\sin x = \frac{3}{4}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\cos x$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine x, $y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$.

b) Să se determine cel mai mare element al mulţimii $A = \{10\sqrt{3}, \sqrt{299}, 12\sqrt{2}\}$.

c) Să se calculeze $S = \log_2 8 + \log_2 2^{-1}$.

d) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $2^X + 2^{x+1} = 3$.

e) Să se calculeze numărul complex $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se arate că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f(x)$.

SUBIECTUL III

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2007$, $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(x)$.

a) Să se calculeze $f(2006)$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f(x + 1) - f((x + 1)^2) = -2$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(3000)$.

d) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că $f_n(x) = x - n \cdot 2007$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{R}$.

f) Să se determine funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(g(x)) = f_3(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

g) Să se demonstreze că $f(1^3) + f(2^3) + \ldots + f(n^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2007n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{(x^2+4)(x^2+1)}$.

a) Să se demonstreze că $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+4}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f către $+\infty$.

e) Să se arate că $f(x) \leq \dfrac{3}{4}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\int_3^4 f'(x)\, dx$.

g) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{8}) + f(\sqrt{11}) + \ldots + f(\sqrt{3n+2}) \right)$.

M3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

a) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $3x^2 - 12x + 9 = 0$.

b) Să se determine mulţimea valorilor lui x care verifică $x^2 + 5x - 6 \leq 0$.

c) Să se rezolve ecuaţia $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

d) Să se determine valoarea lui x pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ ia valoarea minimă.

e) Să se arate că $x^2 + 4x + 5 \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}} 18 + \log_{\frac{1}{3}} 3$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine numărul submulţimilor de trei elemente impare ale mulţimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
b) Să se calculeze câte numere de şase cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii A.
c) Să se calculeze $C_6^0 + C_6^1 + \ldots + C_6^6$.
d) Să se calculeze câte numere de trei cifre distincte scrise cu elemente din A sunt divizibile cu 5.
e) Să se calculeze A_6^3.

2. **a)** Să se calculeze perimetrul pătratului de arie 25.
b) Să se calculeze aria unui romb cu diagonalele de 3 şi respectiv de $3\sqrt{3}$.
c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu înălţimea $6\sqrt{3}$.
d) Să se calculeze lungimea diagonalei unui cub cu volumul de 27.
e) Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $\sqrt{2}$.

SUBIECTUL III

Fie dreptele paralele d_1 şi d_2. Alte două drepte paralele d_3 şi d_4, care formează cu d_1 unghiuri de $30°$, intersectează dreptele d_1 în A şi B,iar d_2 în C şi D astfel încât punctele B şi D să fie în semiplane diferite determinate de dreapta AC.

a) Să se arate că $ABCD$ este paralelogram.

b) Dacă notăm cu O intersecţia diagonalelor paralelogramului $ABCD$, să se arate că triunghiurile AOB şi COD sunt congruente.

c) Să se arate că triunghiurile AOB şi AOD au aceeaşi arie.

d) Să se calculeze cât la sută din aria paralelogramului $ABCD$ reprezintă aria triunghiului DOC.

e) Să se calculeze măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$.

f) Dacă distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este 4, să se calculeze lungimea lui AD

g) Dacă $DC = 8$, să se calculeze aria lui $ABCD$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$.

a) Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei cu axele de coordonate.

b) Să se calculeze aria triunghiului format de graficul funcţiei cu axele de coordonate.

c) Să se calculeze $\dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$.

d) Să se calculeze $f(0) - f(1) + f(2)$.

e) Să se rezolve ecuaţia $|f(x)| = 3$.

f) Să se determine valorile lui x pentru care $f(x) \geq 0$.

g) Să se determine pentru ce valori ale lui m funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - mx$ este crescătoare.